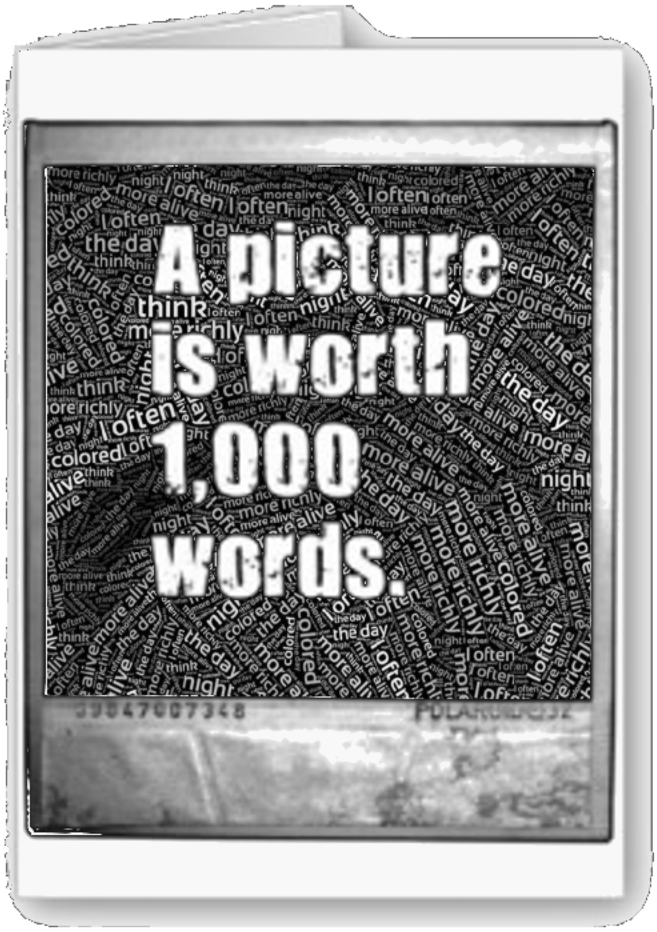
Una immagine vale più di mille parole

Alessio Fanfani

25 gennaio 2012

alessiofanfani@altervista.org

http://alessiofanfani.altervista.org



1 Introduzione

Chi di voi non conosce il famoso detto *"Una immagine vale più di mille parole"*? Per valutarne la diffusione è sufficiente scriverlo sul famoso motore di ricerca che inizia per G e si ottengono 2.660.000 risultati. Vi siete mai chiesti se questo aforisma è realmente veritiero?

Con questo articolo voglio presentarvi una divertente ed allo stesso tempo educativa dimostrazione della verità di questo detto. La dimostrazione, che ho incontrato nel corso dei miei studi in Ingegneria delle Telecomunicazioni, utilizza alcuni concetti basilari della Teoria dell'Informazione[1].

Scopo secondario di questo articolo è quello di fornire alcune nozioni basilari del Information Theory quali la *Quantità di Informazione* e l'*Entropia*.

2 Teoria dell'Informazione

Informare è un'espressione che viene dal latino e vuol dire "dare forma a qualcosa". Modellare cioè, una cosa che prima era informe. L'opinione che avevamo su un argomento era prima indeterminata, confusa, attraverso l'informazione, invece, le diamo una forma. Oggi, più precisamente, intendiamo per informazione qualunque cosa che sia in grado di eliminare un'incertezza.

Sono informazioni le notizie riportate dai giornali e delle quali, naturalmente, il lettore non era prima al corrente. In questo modo il giornale comunica al cittadino delle notizie che contribuiscono ad eliminare incertezze ad esempio sulla stabilità dell'euro, sulla politica, sul governo, sulla disoccupazione, ecc. Le fonti che generano tali informazioni si definiscono *sorgenti*. Un'immagine televisiva, ad esempio, racchiude una grande quantità d'informazioni di vario tipo: forme, colori, movimenti, suoni, dati, ecc.[3]

Bisogna stabilire un modo per quantificare l'informazione trasportata o meglio contenuta in un messaggio. Un messaggio inusuale, difficile da prevedere contiene molta più informazione di un messaggio ovvio. Alcuni esempi sono i seguenti:

- la notizia di un aereo che casca è molto più informativa rispetto a quella di un aereo che arriva a destinazione regolarmente;
- secondo voi è più rilevante la notizia di un cane che morde il padrone o quella di un padrone che morde il cane?

[1] La teoria dell'informazione è quel settore dell'informatica e delle telecomunicazioni che si occupa di definire le basi teoriche su cui si fonda la scienza dell'informazione. La sua nascita è relativamente recente: essa viene solitamente fatta risalire al 1948, anno in cui Claude Shannon pubblicò *"Una teoria matematica della comunicazione"* in cui introduceva per la prima volta in modo sistematico lo studio dell'informazione e della comunicazione.[2]

Questi esempi aiutano a capire che la Quantità di Informazione di un evento è inversamente proporzionale alla probabilità che tale evento si verifichi.

L'informazione associata ad un evento S_i con probabilità $P(S_i)$ è definita come:

$$I(S_i) = \log_2 \frac{1}{P(S_i)}$$

Il logaritmo potrebbe essere in base qualsiasi ma nella Teoria dell'informazione quello più usato è in base 2; ciò fa sì che l'unità di misura dell'informazione sia il *bit.*

L'andamento della *Quantità di Informazione* in funzione della *probabilità* è riportato nel grafico in fig. 1.

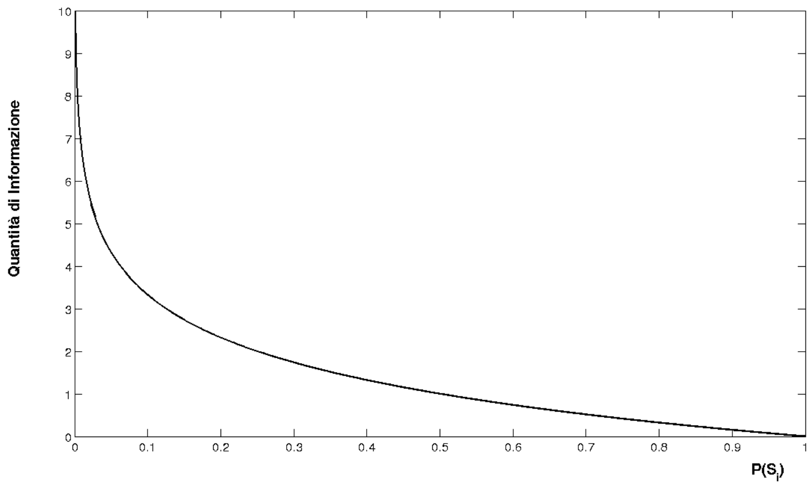


Figura 1: Quantità Informazione

Possiamo notare come un evento certo, con $P(S_i) = 1$ porta *informazione* nulla; ciò è ovvio poichè se una cosa è certa e nota non ha senso che sia comunicata.

Un altro strumento usato nella Teoria dell'informazione è l'Entropia che può essere definita come la misura dell'informazione media associata ad una certa sorgente. Matematicamente l'Entropia di una sorgente S che emette simboli S_i con probabilità $P(S_i)$ è definita come:

$$H(S) = \sum_{S_i} P(S_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(S_i)}$$

Come esempio prendiamo una sorgente S che emette simboli A e B con probabilità rispettivamente $P(A) = p$ e $P(B) = 1 - p$.

In questo caso l'entropia vale:

$$H(S) = P(A) \cdot \log_2 \frac{1}{P(A)} + P(B) \cdot \log_2 \frac{1}{P(B)} = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p}$$

L'andamento dell'entropia in quest'ultimo caso è riportato nel grafico in fig. 2.

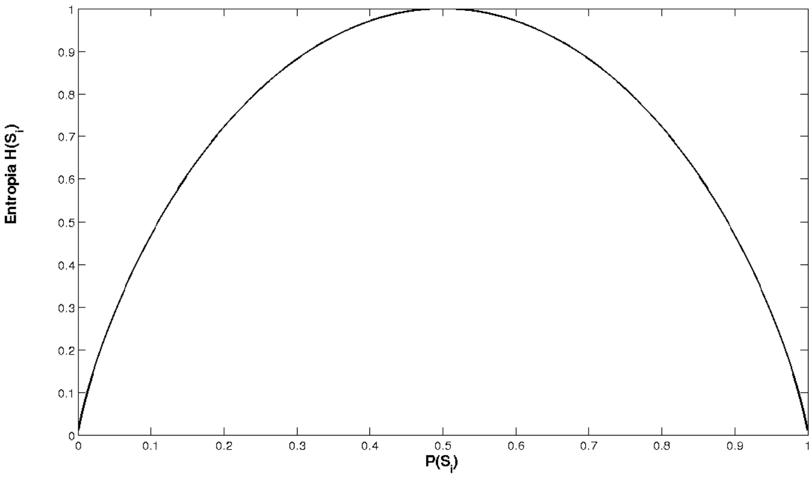


Figura 2: Entropia

Possiamo notare che l'entropia è simmetrica, presenta il massimo quando i due eventi sono equiprobabili $P(A) = P(B) = 0.5$ ed è nulla nel caso di evento impossibile o certo, rispettivamente, $P(A) = 0$ e $P(B) = 1$.

Se siete interessati ad approfondire le vostre conoscenze sulla Teoria dell'Informazione vi consiglio il libro [1].

3 Dimostrazione Aforisma

La dimostrazione dell'aforisma *"Una immagine vale più di mille parole"* consiste nella valutazione della quantità di informazione associata a 1000 parole e quella associata ad una immagine. La metrica usata per il confronto è l'entropia.

3.1 Entropia di 1000 parole

Per valutare l'entropia associata a mille parole dobbiamo introdurre alcune ipotesi. Supponiamo di considerare una pagina di testo costituita da 50 righe; ogni riga contiene mediamente 20 parole, per un totale di parole nel testo pari a mille. Alcuni studi affermano che una persona utilizza un vocabolario di circa 60000 parole[4].

Nella pagina di testo si possono verificare un numero di combinazioni di parole pari a:

$$1000^{60000}$$

Supponiamo inoltre che queste parole siano distribuite uniformemente[2] ovvero sono equiprobabili, ognuna con probabilità pari a $\frac{1}{1000^{60000}}$.

In questo caso il valore dell'entropia è:

$$H(S) = \sum_{S_i} P(S_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(S_i)} = \log_2 \frac{1}{P(S_i)} = \log_2 1000^{60000} \cong 16000 \; bit$$

3.2 Entropia di una immagine

Prima di valutare l'entropia associata all'immagine elenchiamo le sue caratteristiche:

- Dimensioni: 800 x 600 pixel;
- Scala dei Grigi a 256 livelli[3].

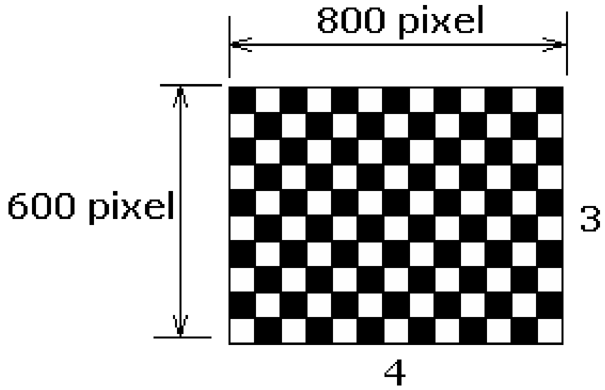


Figura 3: Immagine

Le possibili combinazioni dei pixel interni all'immagine sono:

$$256^{800x600}$$

Supponiamo inoltre che questi siano distribuiti uniformemente ognuno con probabilità pari a $\frac{1}{256^{800x600}}$.

Il valore dell'entropia in quest'ultimo caso è:

$$H(S) = \sum_{S_i} P(S_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(S_i)} = \log_2 \frac{1}{P(S_i)} = \log_2 256^{800 \cdot 600} = 800 \cdot 600 \cdot \log_2 256 = 3840000 \; bit$$

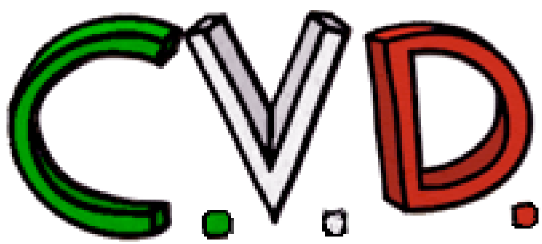
[2]Quando non si hanno informazioni relative alle densità di probabilità delle grandezze in analisi, supporre che esse siano distribuite uniformemente è generalmente lecito.

[3]Per quantizzare 256 livelli sono necessari 8 bit per pixel.

3.3 Conclusioni

Si può facilmente osservare come il valore dell'entropia associata ad un'immagine è molto maggiore rispetto al valore dell'entropia di un foglio di testo con 1000 parole, dimostrando dunque la veridicità dell'aforisma.

Da oggi potrete con maggior convinzione continuare ad affermare che *"Una immagine vale più di mille parole"*.



Riferimenti bibliografici

[1] Abramson, Norman. Information Theory and Coding, New York: McGraw-Hill, 1963.

[2] WIKIPEDIA - http://it.wikipedia.org/

[3] http://www.ilmondodelletelecomunicazioni.it/

[4] http://www.assomensana.it/Comunicazione-e-disturbi/sviluppo-lingusitico-dei-bambini.php